Université Bordeaux
M1 Informatique, 2019-2020

Complexité et Calculabilité : TD6

Décidabilité et arrêt.

6.1 Rappels

Un ensemble L (défini comme un langage sur un alphabet Σ) est *décidable* s'il existe un programme P qui pour toute entrée $n \in \Sigma^*$, s'arrête au bout d'un temps fini dans un état acceptant quand l'entrée appartient à L, et s'arrête dans un état refusant dans le cas contraire.

Par problème, on désigne ici des problèmes de décision, exprimés sous la forme :

Étant donnée une entrée n, est-ce que n satisfait une certaine propriété.

Le langage associé à un problème est l'ensemble des entrées qui satisfont la propriété. Le problème est décidable si et seulement si le langage associé l'est.

6.2 Arrêt et décidabilité

Exercice 6.1

Soit P un programme qui prend en entrée un entier (positif ou nul) *et qui termine sur toute entrée*, en retournant un entier positif ou nul. On s'intéresse à *l'ensemble des valeurs calculées par le programme P*, *i.e.* l'ensemble des entiers m tel que l'on ait $m = P(n)$ pour au moins un entier n. Montrez que l'ensemble des valeurs calculées par P est un ensemble décidable, dans chacun des deux cas suivants :

1. On suppose que pour toute entrée n, la fonction $P(n)$ calculée par P sur n satisfait $P(n) \geq n$.
2. On suppose que P calcule une fonction strictement croissante.

Exercice 6.2

On considère les problèmes de décision suivants sur des programmes P. (dans les deux cas, les programmes prennent en entrée un seul entier et calculent une valeur stockée dans la variable res.) :

1. HALT_0 : est-ce que P s'arrête sur l'entrée 0 ?
2. VAL_0 : est-ce que $P(0) = 0$? (*i.e.*, est-ce que P s'arrête sur l'entrée 0, et retourne alors la valeur 0 ?)

Justifiez que les fonctions suivantes sont bien des réductions (calculables) de HALT_0 vers VAL_0 (fonction R_1) et vice-versa (fonction R_2) :

1. R_1 définit à partir d'un programme P un nouveau programme P' comportant les instructions suivantes :

   $P(0)$;
   res := 0

2. R_2 définit à partir d'un programme P un nouveau programme P' comportant les instructions suivantes (où z est une nouvelle variable, et res est la variable “résultat” du programme P) :

   $P(0)$;
   WHILE (res $\neq 0$) DO $z := z + 1$ OD

Exercice 6.3

Soient u et v deux mots. On écrit $u \subseteq v$ quand u peut s'obtenir à partir de v en effaçant des lettres (par exemple $aaa \subseteq ababca$). On considère le problème d'inclusion de Post qui est une version légèrement modifiée du problème de correspondance de Post :

ENTRÉE	:	$(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$
QUESTION	:	Existe-t-il $i_1, \ldots, i_k$ tels que $u_{i_1} \cdots u_{i_k} \subseteq v_{i_1} \cdots v_{i_k}$?

1. Soient u, u', v et v' des mots, montrez que si $uu' \subseteq vv'$ alors $u \subseteq v$ ou $u' \subseteq v'$.
2. Montrez que si le problème d'inclusion de Post a une solution alors il a une solution de longueur 1 (*i.e.* avec $k = 1$).
3. Montrez que le problème d'inclusion de Post est décidable.

Exercice 6.4

Soit P un programme WHILE avec pour seules variables x_0 et x_1, qui prend en entrée un entier. On sait que P satisfait l'invariant suivant :

— Sur entrée n, les valeurs de x_0 et x_1 durant l'exécution de P sont toujours inférieures à n^2.

Décrivez un algorithme qui répond à la question suivante :

Entrée : entier n.

Question : est-ce que P s'arrête sur n ?

Exercice 6.5

Montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : machine de Turing M.

Question : est-ce que M a un calcul infini sur le mot vide ?

Exercice 6.6

Dans cet exercice on veut montrer que le problème du pavage du quart de plan est indécidable. Pour ce problème on a comme entrée :

— un ensemble fini de tuiles D,
— des contraintes horizontales $H \subseteq D \times D$ et verticales $V \subseteq D \times D$,
— une tuile initiale $d_0 \in D$.

Un pavage $p : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to D$ du quart de plan associe à chaque position (i, j) du quart de plan une tuile $p(i, j) \in D$ tel que :

— $p(0, 0) = d_0$,
— $(p(i, j), p(i, j + 1)) \in H$ pour tous $i, j \geq 0$,
— $(p(i, j), p(i + 1, j)) \in V$ pour tous $i, j \geq 0$.

Montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : D, $H, V \subseteq D \times D$, $d_0 \in D$.

Question : est-ce qu'il existe un pavage du quart de plan ?

Indication : Vous pouvez réduire de la question précedante, en supposant que M a une seule bande infinie à droite. Vous allez définir D, H, V de telle sorte qu'un pavage du quart de plan correspond à un calcul de M sur le mot vide : la n-ème ligne du pavage doit correspondre à la n-ème configuration du calcul. Une configuration $A_1 \cdots A_i q A_{i+1} \cdots A_n$ sera codée par le mot $A_1(A_1, A_2)(A_2, A_3) \cdots (A_{i-1}, A_i)(q, A_i, A_{i+1})(A_{i+1}, A_{i+2}) \cdots (A_{n-1}, A_n)$.