Université Bordeaux
M1 Informatique, 2019-2020

Complexité et Calculabilité : TD5

Machines de Turing.

5.1 Machines de Turing simples

Les exercices de ce TD consistent à décrire des machines de Turing pour résoudre un certain nombre de problèmes. On supposera au démarrage de la machine que la tête de lecture se trouve sur le *bit le plus à gauche* du mot d'entrée (bit de poids fort dans le cas des nombres binaires) dans un état q_{init}. L'alphabet des machines ci-dessous est par défaut $\{O, 1, \square\}$, sauf s'il est décrit explicitement. Elle a un ensemble d'états Q et des états acceptant F.

On décrira la machine

- soit par un ensemble de transitions, chaque transition étant décrite par

$$q : c \longrightarrow q', c', move$$

  où c et c' sont les caractères respectivement lu et écrit sur la bande, q et q' sont les états de la tête avant et après la transition, et $move \in \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ est le déplacement de la tête de lecture.
- soit par un automate des états en étiquetant les flèches/transition par le triplet $(c, c', move)$ défini comme ci-dessus.

À chaque pas, la machine emprunte une transition. Si elle ne peut plus avancer, elle s'arrête et regarde alors son état. Si il est dans F, elle accepte, sinon elle rejette. Dans le cas où elle accepte, elle renvoie comme sortie le mot présent sur sa bande (si on s'intéresse à cette sortie).

Vous pouvez trouver en ligne des simulateurs de machine de Turing, par exemple `https://turingmachinesimulator.com/`

Exercice 5.1

Écrire une machine de Turing qui multiplie son entrée binaire par 2. On prendra soin de ramener la tête de lecture sur le caractère le plus à gauche du mot d'entrée.

Exercice 5.2

Écrire une machine de Turing qui, étant placé sur le premier chiffre d'un nombre binaire x, incrémente ce nombre de un puis s'arrête.

Exercice 5.3

Écrire une machine de Turing qui étant donné son entrée u, écrit $\tilde{u}$ le miroir de u (ex : si $u = abc$, $\tilde{u} = cba$). Vous pourrez augmenter la taille de l'alphabet de travail (par exemple, pour marquer des positions).

Exercice 5.4

Écrire une machine de Turing qui prend en entrée deux nombres binaires séparés par un caractère spécial # (i.e., $n_1\#n_2$) et calcule la somme de ces deux nombres. Vous aurez le droit d'utiliser des bandes de travail et une bande de sortie qui contienda n_3 égal à la somme de n_1 et n_2 en fin de calcul. Pour simplifier, vous pourrez d'abord réécrire n_1 et n_2 de manière à ce que le bit de poids faible soit à gauche (cf exercice précédent, ou utilisez le fait que vous avez droit à plusieurs bandes).

Indications :

— Commencez par vous rappeler comment on fait une addition en binaire.
— Découpez votre machine en parties simples.
— Décrivez ensuite une sous-machine pour chaque partie simple.

Note : à partir de maintenant, vous décrirez vos machines de Turing à «haut niveau», c'est-à-dire que vous serez autorisés à utiliser des descriptions du type «la machine de Turing se déplace vers la droite jusqu'au prochain symbole marqué» si ces descriptions sont aisément réalisables par une machine de Turing. Ceci a pour but de vous éviter une partie fastidieuse de l'écriture des machines de Turing, mais n'est pas une raison pour être imprécis.

Exercice 5.5

Décrivez une machine de Turing non-déterministe qui prend en entrée une suite de mots de la forme $n_1\#n_2\#\cdots\#n_k$ et accepte si et seulement si il existe deux mots n_i et n_j identiques avec $i \neq j$.

NB : vous avez le droit d'utiliser des bandes de travail.

Est-il possible d'accepter ce langage avec une machine de Turing déterministe ?

Exercice 5.6

On considère une machine de Turing T ayant une bande de travail en plus de sa bande d'entrée/sortie. Construisez une machine de Turing T' calculant la même fonction mais n'ayant une seule bande. Vous aurez le droit d'augmenter le nombre de symboles utilisé par T' par rapport à T.

Justifiez que le nombre de pas de calculs est au pire multiplié par un facteur polynomial en la taille maximale de la bande utilisée.

Exercice 5.7

On considère une machine de Turing T à une bande travaillant avec les symboles $\{a, b, c, d, \square\}$. Construisez une machine de Turing T' à une bande travaillant avec les symboles $\{0, 1, \square\}$ qui simule T (c-à-d telle que toute configuration de T correspond exactement à une configuration de T' et que les deux machines se comportent de la même manière pour ces configurations).

Qu'en concluez-vous sur les différents modèles de machines utilisés jusqu'ici (différents alphabet, plusieurs bandes, ...) ?

5.2 Pour s'entraîner à la maison (ou ailleurs)

Voici quelques exercices bonus pour manipuler des machines de Turing. Décrivez les deux premières entièrement. Pour les deux suivantes, vous pourrez adopter une description plus haut niveau.

Exercice 5.8

Écrire une machine de Turing qui multiplie par 3 son entrée binaire.

Exercice 5.9

Écrire une machine de Turing qui lit un mot sur son entrée et atteint un état acceptant si c'est un palindrome. (On s'autorisera à effacer le mot d'entrée)

Exercice 5.10
Écrire une machine de Turing qui convertit un nombre unaire en nombre binaire.

Défi pour les plus vaillants :
Écrire une machine de Turing qui étant donné un nombre n sur son entrée, calcule le $n$ième terme de la suite de Fibonnacci.