

## Complexité et Calculabilité : TD4

Ensembles dénombrables et programmes LOOP.

### 4.1 Ensembles dénombrables

*Rappels* : Une énumération d'un ensemble infini  $D$  est une bijection  $f : \mathbb{N} \rightarrow D$ . On a donc  $D = \{f(0), f(1), \dots\}$  et  $f(i) \neq f(j)$  pour tout  $i \neq j$ . Un ensemble  $D$  s'appelle *dénombrable* s'il peut être énuméré. Il s'appelle *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable. On s'intéresse surtout aux énumérations calculables : la bijection  $f : \mathbb{N} \rightarrow D$  doit être calculable. Un tel ensemble  $D$  s'appelle *dénombrable de manière effective*.

#### Exercice 4.1

Montrez que si  $D$  est un ensemble dénombrable, alors tout sous-ensemble  $D' \subseteq D$  est au plus dénombrable.

#### Exercice 4.2

1. Montrez que  $\mathbb{Z}$  est un ensemble dénombrable.
2. Montrez que  $\mathbb{N}^2$  est un ensemble dénombrable.
3. Montrez que si  $D$  et  $D'$  sont deux ensembles dénombrables, alors leur *produit cartésien*  $D \times D'$  est un ensemble dénombrable.
4. Déduisez-en que si  $D$  est un ensemble dénombrable, alors pour tout  $k$ ,  $D^k$  est un ensemble dénombrable.
5. On rappelle que  $D^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D^k$ . Peut-on déduire de ce qui précède que si  $D$  est dénombrable, alors  $D^*$  est dénombrable ?

#### Exercice 4.3

Montrez que les ensembles suivants sont dénombrables (de manière effective) :

1. l'ensemble des matrices avec entrées entières,
2. l'ensemble  $\Sigma^*$  des mots sur un alphabet (fini)  $\Sigma$ ,
3. l'ensemble des programmes C,
4. l'ensemble des arbres orientés,
5. l'ensemble des graphes orientés.

#### Exercice 4.4

On considère l'ensemble des suites infinies d'entiers  $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . On suppose que cet ensemble est dénombrable, et qu'il est donc de la forme  $\{e_1, e_2, \dots\}$ .

1. On définit la suite  $f$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = e_n(n) + 1$ . Cette suite est-elle une suite d'entiers ?
2.  $f$  peut-elle être l'un des  $e_n$  ?
3. Qu'en déduisez-vous sur la dénombrabilité de l'ensemble des suites infinies d'entiers ?

4. Cela contredit-il ce que vous savez sur la dénombrabilité des suites finies d'entiers ?
5. Utilisez cela pour déterminer si l'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 est dénombrable ou non.

## 4.2 Programmes LOOP

Les programmes que vous aurez à écrire ici ne manipuleront que des entiers positifs ou nuls. Les seules instructions que vous pouvez utiliser (en-dehors des séquences que vous aurez définies), sont les instructions :

$x:=y+c$  ou  $x:=c$  : où  $c$  est une constante (0,1,2 ...),  $x$  et  $y$  sont des variables (potentiellement la même)

$x:=y-c$  : avec les mêmes conditions (attention, ceci calcule la différence tronquée, c'est à dire  $\max(y - c, 0)$ ).

LOOP( $x$ ) DO P OD : qui exécute exactement  $x$  fois les instructions du programme P (indépendamment des changements sur la variable  $x$ ).

### Exercice 4.5

Écrivez deux programmes LOOP qui calculent respectivement les fonctions suivantes et affectent la valeur calculée à `res` :

$$isPositive(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad isZero(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Exercice 4.6

Soient  $P, Q$  deux programmes LOOP. Écrivez un programme LOOP qui simule l'instruction if-then-else :

IF ( $x > 0$ ) THEN  $P$  ELSE  $Q$  FI

### Exercice 4.7

Écrivez un programme LOOP *Somme* qui calcule la somme de deux entiers  $x$  et  $y$ .

### Exercice 4.8

Écrivez un programme LOOP *DiffTr* qui calcule la différence tronquée  $x \dot{-} y$ , définie par  $x \dot{-} y = x - y$  si  $x \geq y$ , et 0 sinon.

### Exercice 4.9

Écrivez un programme LOOP *Prod* qui calcule le produit de deux entiers  $x$  et  $y$ .

### Exercice 4.10

Écrivez un programme LOOP *Min* qui calcule  $\min(x, y)$ .

### Exercice 4.11

Écrivez un programme LOOP *Quotient* qui calcule le quotient de la division entière de  $x$  par  $y$ .

**Exercice 4.12**

Écrivez un programme LOOP *Dec* qui calcule le nombre de décimales de la représentation décimale d'un entier. Par exemple  $Dec(5) = 1$ ,  $Dec(1548) = 4$ ,  $Dec(1236987) = 7$ .

**Exercice 4.13**

Écrivez un programme LOOP qui simule la séquence d'instructions en C suivante :

```
{ int x = n;
  int prop=1;
  while(x > 0 && prop > 0){
    Q;
    x=x-1;
  }}
```

où le programme Q (codable en LOOP) modifie `prop` mais pas `x`. Pourquoi la variable `x` joue-t-elle un rôle important ?