Université de Bordeaux
M1 Informatique

Complexité et Calculabilité : TD3

NP et réductions, exemple de ensemble dominant.

3.1 Réductions

Exercice 3.1

Dans un graphe, on dit d'un sommet qu'il se domine lui même et l'ensemble de ses voisins. Un *ensemble dominant* S est un ensemble de sommets qui domine chacun des sommets de V.

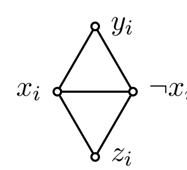
Le problème ENSEMBLE DOMINANT S dans un graphe est le suivant :

> ENSEMBLE DOMINANT S
>
> **Entrée :** Un graphe G et un entier k.
>
> **Sortie :** Existe-t-il un ensemble dominant S de taille au plus k ?

1. Décrivez un vérificateur polynomial du problème ENSEMBLE DOMINANT S.
2. Proposez une réduction vers SAT de ce problème. On utilisera des variables $x_{v,i}$ pour signifier que le sommet v est le $i$ème sommet de l'ensemble dominant.
3. Expliquez pourquoi il n'est pas nécessaire de coder la contrainte :

   "L'un des sommets de G est le $i$ème sommet du dominant."
4. Combien de littéraux comporte votre formule ?
5. Que déduit-on sur le problème ENSEMBLE DOMINANT S ?

Nous allons maintenant définir une réduction de SAT vers ENSEMBLE DOMINANT S. L'idée est la suivante : pour chaque variable x_i, on utilise le gadget ci-contre, comportant deux sommets marqués avec les littéraux x_i et $\neg x_i$. Les sommets y_i et z_i ne sont reliés à aucun autre sommet. Puis, on ajoute un sommet correspondant à chaque clause, qui sera relié exclusivement aux sommets des littéraux qui la composent. L'ensemble S est l'ensemble de tous les sommets du graphe.



Soit n_ϕ le nombre de variables d'une formule SAT ϕ et m_ϕ son nombre de clauses. Soit G_ϕ le graphe construit comme indiqué ci-dessus pour la formule ϕ.

6. Dessinez le graphe G_ϕ correspondant à la formule

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

7. Justifiez qu'un dominant de G_ϕ comporte nécessairement au moins n_ϕ sommets.
8. Expliquez comment on construit un dominant de taille n_ϕ de G_ϕ à partir d'une solution de la formule ϕ.
9. Expliquez comment on trouve une solution de la formule ϕ à partir d'un dominant de taille n_ϕ du graphe G_ϕ. En particulier, il faut justifier que les sommets choisis dans le dominant sont des sommets correspondants à des littéraux.

10. Que déduit-on sur le problème ENSEMBLE DOMINANT S ?

Voici une version optimisation du problème ENSEMBLE DOMINANT S

> ENSEMBLE DOMINANT S (OPTIMISATION)
>
> **Entrée :** Un graphe G
>
> **Sortie :** Le plus petit entier k tel qu'il existe un ensemble dominant S de taille k.

11. Proposez une réduction (facile) de ENSEMBLE DOMINANT S à ENSEMBLE DOMINANT S (OPTIMISATION).
12. Proposez un algorithme (un peu plus compliqué) qui résout ENSEMBLE DOMINANT S (OPTIMISATION) à l'aide d'autant d'appels que souhaité à un algorithme résolvant ENSEMBLE DOMINANT S. En supposant que l'algorithme résolvant ENSEMBLE DOMINANT S est de complexité $f(n)$ pour un graphe à n sommets, estimez la complexité dans le pire cas de votre algorithme (en fonction de n et de $f(n)$).

Voici enfin une version avec calcul de solution du problème ENSEMBLE DOMINANT S :

> ENSEMBLE DOMINANT S (CALCUL DE SOLUTION)
>
> **Entrée :** Un graphe G et un entier k.
>
> **Sortie :** Un ensemble d'au plus k sommets formant un ensemble dominant S s'il en existe, le message *failed* sinon.

13. Proposez une réduction (facile) de ENSEMBLE DOMINANT S à ENSEMBLE DOMINANT S(CALCUL DE SOLUTION).
14. Proposez un algorithme (un peu plus compliqué) qui résout ENSEMBLE DOMINANT S (CALCUL DE SOLUTION) à l'aide d'autant d'appels que souhaité à un algorithme résolvant ENSEMBLE DOMINANT S. En supposant que l'algorithme résolvant ENSEMBLE DOMINANT S est de complexité $f(n)$ pour un graphe à n sommets, estimez la complexité dans le pire cas de votre algorithme (en fonction de n et de $f(n)$).